

La modélisation mathématique et ses applications dans les domaines STEM (science, technologie, ingénierie et mathématiques)



En conversation :
Marina Milner-Bolotin (Université de la Colombie-Britannique) et
Dragana Martinovic (MKN et Université de Windsor)



Résumé : Dans ce guide d'animation, nous présentons des idées qui ont été partagées lors du webinaire du réseau d'apprentissage professionnel (Professional Learning Network) animé par les D^{res} Marina Milner-Bolotin et Dragana Martinovic le 15 août 2022. Le guide aborde la recherche contemporaine sur la modélisation, son potentiel pédagogique dans l'enseignement K-12 et des idées pour enseigner la modélisation à différents niveaux de scolarité. Nous concluons avec une vue d'ensemble et un exemple de travail avec notre cadre pédagogique pour la modélisation dans les matières STEM. L'objectif est de donner aux enseignants des idées pour intégrer la modélisation dans leurs programmes de mathématiques et de sciences.

Introduction — Changements dans le curriculum mathématique

Questions : Quelles sont les tendances notables dans les changements des programmes de mathématiques? En quoi l'enseignement des mathématiques diffère-t-il aujourd'hui de son enseignement selon les programmes antérieurs?

Ceux d'entre vous qui ont enseigné d'autres matières se souviennent probablement de situations dans lesquelles vos élèves ont dû utiliser les mathématiques. Cela s'est peut-être produit pendant que vous discutiez de l'art abstrait de Kazimir Malevich, Theo van Doesburg, Pablo Picasso ou Piet Mondrian. Vous avez peut-être demandé à vos élèves de nommer les figures observables dans un tableau, d'identifier des motifs ou de comparer les zones couvertes par différentes couleurs.

Une enseignante du secondaire de la ville d'Atlanta, Withney Panetta, a utilisé les œuvres de trois artistes abstraits pour montrer des exemples des trois principaux éléments de l'art abstrait : Piet Mondrian pour la ligne, Wassily Kandinsky pour la forme et Mark Rothko pour la couleur. Les seules directives [qu'elle a] données aux élèves étaient qu'il fallait mettre l'accent sur la ligne, la forme ou la couleur (les trois aspects devaient être présents, mais un seul allait être présenté dans chaque cas) ainsi que sur les trois principes suivants: l'équilibre, l'unité et un point focal. Les trois aspects sont les blocs de construction et les trois principes sont ce qui fait une œuvre d'art réussie. ([Panetta, 2018](#)).



Figure 1. Exemples d'œuvres de Mondrian, Kandinsky et Rothko.

Mme Panetta a-t-elle enseigné les mathématiques? Non, mais si ses élèves avaient des difficultés avec l'un des concepts mathématiques utilisés, elle avait à le leur clarifier.

Ceci est un exemple d'utilisation des mathématiques dans un *monde extra-mathématique*¹, une expression utile mise de l'avant par Niss, Blum et Galbraith (2007), terme qui est plus englobant que la référence au *monde réel*, qui est utilisée habituellement (Fig. 1). Un changement notable dans le programme d'études actuel de l'Ontario (ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2020) est que les connaissances qui peuvent appartenir à d'autres matières ou qui sont parascolaires, ont commencé à trouver leur place dans les cours de mathématiques, à l'opposé de ce qui se passait auparavant dans d'autres matières.

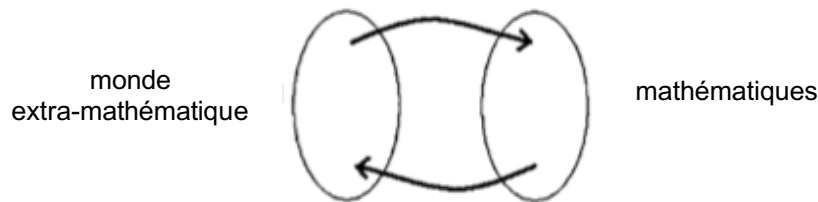


Figure 2. Visualisation d'un cycle de modélisation (Niss, Blum, et Galbraith, 2007, p. 4).

Questions : Êtes-vous parfois incertain de ce qu'il faut faire dans vos cours de STEM ou d'autres cours, lorsque vos élèves ont des problèmes avec des concepts et des compétences qu'ils auraient dû maîtriser dans leurs cours de mathématiques? Que faites-vous alors? Vous les enseignez ou vous les sautez, puisque ce n'est pas « l'heure des maths », ou... ?

Les professeurs de sciences interrogés par Milner-Bolotin et Zazkis (2021) se disent confus quant à ce qu'ils peuvent/pourraient faire avec un contenu mathématique. La plupart d'entre eux ont évité d'utiliser les mathématiques qu'ils considéraient comme problématiques pour leurs élèves et ont tenté de les « simplifier ». En termes d'évaluation, de nombreux professeurs de sciences ont estimé qu'il serait injuste d'évaluer les compétences en mathématiques tout autant que l'utilisation de la langue dans d'autres matières.

¹ « Le monde extra-mathématique peut être une autre matière ou discipline, un domaine de pratique, une sphère de la vie privée ou sociale, etc. Le terme *monde réel* est souvent utilisé pour décrire le monde en dehors des mathématiques, même si, disons, la physique quantique ou les orbitales en chimie peuvent sembler moins que réelles pour certains. Le monde extra-mathématique [désigne] une partie du *monde réel* plus large qui est pertinente pour une question ou un problème particulier. » [Notre traduction] (p. 3-4).

De façon réciproque, les professeurs de mathématiques se demandent désormais comment traiter les savoirs non mathématiques lorsqu'ils mettent en œuvre, par exemple, du codage ou de la modélisation dans leurs classes. Les formateurs d'enseignants et les facilitateurs de l'apprentissage professionnel s'interrogent sur les connaissances et les compétences dont les (futurs) enseignants ont besoin dans ces différentes circonstances.

Question: En quoi le travail avec des modèles mathématiques est-il différent de la modélisation?

Une distinction est évidente; la modélisation est un processus et les modèles sont des objets. Mais attendez, une droite numérique n'est-elle pas un modèle mathématique? Ou un système de coordonnées cartésien? Qu'en est-il des objets à manipuler, tels que les solides géométriques tridimensionnels (par exemple le cube, la pyramide ou le cône)? Qu'en est-il d'une formule quadratique ou d'un graphique de parabole? Est-ce que ce sont aussi des modèles? Oui, ce sont tous des modèles qui sont utilisés dans des circonstances différentes et pour diverses raisons. Un modèle peut être représenté visuellement (à l'aide de graphiques, de schémas, de croquis), verbalement ou symboliquement.² Les modèles pourraient également être les résultats intérimaires de la modélisation mathématique, idée que nous explorerons plus à fond dans Martinovic et Milner-Bolotin (2021).

Recherche sur la modélisation dans le contexte STEM

Après avoir interrogé quatre mathématiciens chinois, cinq didacticiens des mathématiques et sept enseignants de mathématiques, Xu, Lu et Yang (2022) ont constaté que³ « les mathématiciens et les formateurs d'enseignants de mathématiques avaient tendance à adopter une approche atomiste de l'apprentissage et de l'enseignement de la modélisation [qui veut dire se concentrer sur l'analyse de modèles mathématiquement], tandis que les enseignants de mathématiques mettaient davantage l'accent sur l'approche holistique [c'est-à-dire la mise en œuvre d'un cycle complet de modélisation]. Les mathématiciens et les didacticiens des mathématiques ont mis l'accent sur l'autonomie de l'élève [c'est-à-dire l'apprentissage centré sur l'élève], tandis que les enseignants ont mis l'accent sur une présentation magistrale [c'est-à-dire l'apprentissage centré sur l'enseignant, en particulier chez les enseignants d'expérience]. (p. 689).

Questions: Lorsque vous organisez une activité de modélisation dans votre classe, préférez-vous démontrer ou laisser l'élève faire le plus de travail ? Pouvez-vous partager des exemples d'une approche holistique ou atomistique de la modélisation ?

² David Orlin Hestenes, un physicien et un professeur de sciences, écrit que dans l'enseignement des mathématiques et des sciences, « Un *modèle* est une représentation de la structure dans un système donné. Un *système* est un ensemble d'*objets* liés, qui peuvent être réels ou imaginaires, physiques ou mentaux, simples ou composites. La *structure* d'un système est un ensemble de relations entre ses objets. Le système lui-même est appelé le *réfèrent* du modèle. » [Notre traduction] (p. 17, 2010).

³ Toutes les citations ont été traduites librement de l'anglais au français. Vous pouvez consulter la version anglaise de ce document sur la page du mkn-rcm en cas de doute.

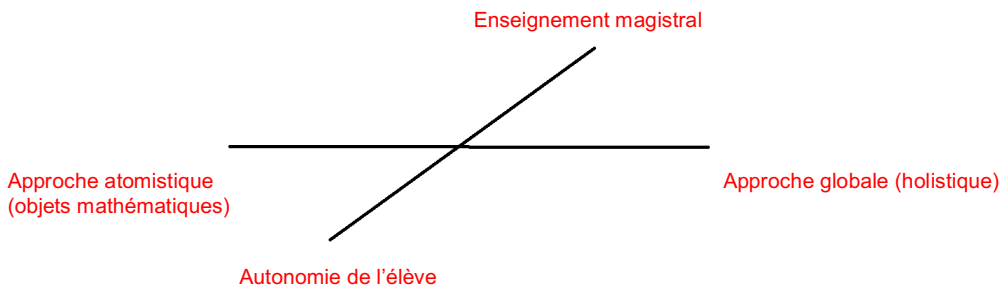


Figure 3. Distinctions dans les approches de la modélisation (Xu *et al.*, 2022)

Ces distinctions peuvent être une conséquence de la pédagogie traditionnelle centrée sur l'enseignant en Chine, mais présentent néanmoins des façons dont les éducateurs perçoivent la modélisation. Le cadre développé par Martinovic et Milner-Bolotin (2021 ; annexe A) suppose que les enseignants relâchent le contrôle pendant les activités de modélisation, conformément à une pédagogie centrée sur l'élève, comme dans la plupart des programmes d'études modernes. Aussi, Xu *et al.* (2022) soulignent que ni l'approche atomiste ni l'approche holistique ne sont supérieures - les deux ont leur place en classe, comme nous le montrerons à l'aide d'un exemple tiré du programme de mathématiques de l'Ontario (Fig. 4).

Avantages de la modélisation

Pour les mathématiciens, les scientifiques et les ingénieurs, la modélisation est une méthodologie, au même titre que la conception et l'expérimentation (Ortiz-Revilla *et al.*, 2020). Elle peut être considérée comme « la caractéristique la plus pertinente du mode scientifique de production des connaissances » (p. 870).

Les chercheurs en éducation ne tarissent pas d'éloges sur la modélisation, car elle conduit à des gains d'apprentissage remarquables, en particulier dans les populations d'étudiants mal desservis et les étudiants à risque, ou comme l'écrivent Lesh, Young et Fennewald (2010), « la modélisation est pratiquement sans équivalent en ce qui concerne les succès qu'elle a produit » (p. 283). Lesh et Yoon (2007) soulignent comment « les modèles et les perspectives de modélisation rejettent l'idée que seuls quelques étudiants exceptionnellement brillants sont capables de développer des concepts mathématiques signifiants à moins que des conseils ne soient fournis par un enseignant étape par étape. » [notre traduction] (p. 163). Ce sont de bonnes raisons d'inclure la modélisation dans le programme de mathématiques.

En quoi la modélisation est-elle différente de la résolution de problèmes? En quoi la modélisation en science est-elle différente de la modélisation en mathématiques?

Selon Lesh et Yoon (2007), la résolution de problèmes crée un chemin entre les données et le résultat final, tel qu'il ne quitte jamais le monde des mathématiques (Fig. 1). Comparativement, « les activités de modélisation mathématique [...] sont des activités de résolution de problèmes qui amènent à créer un modèle » [notre traduction] (Lesh et Yoon, 2007, p. 163). De telles activités doivent démontrer l'utilité du modèle dans un domaine de la vie réelle en dehors des mathématiques.

Le récent programme de mathématiques de la 1^{re} à la 8^e année de l'Ontario de 2020 décrit le processus de modélisation mathématique (Fig. 4). Les enseignants sont invités à utiliser des activités de modélisation à tous les niveaux, dans le cadre du volet Algèbre. Dans la figure 4, les composantes 1, 2 et 4 appartiennent au cercle « situation de la vie quotidienne » ou « situation réelle » (le monde extra-mathématique de Niss, Blum et Galbraith (2007), tandis que la composante 3 est distincte et appartient au monde des mathématiques.

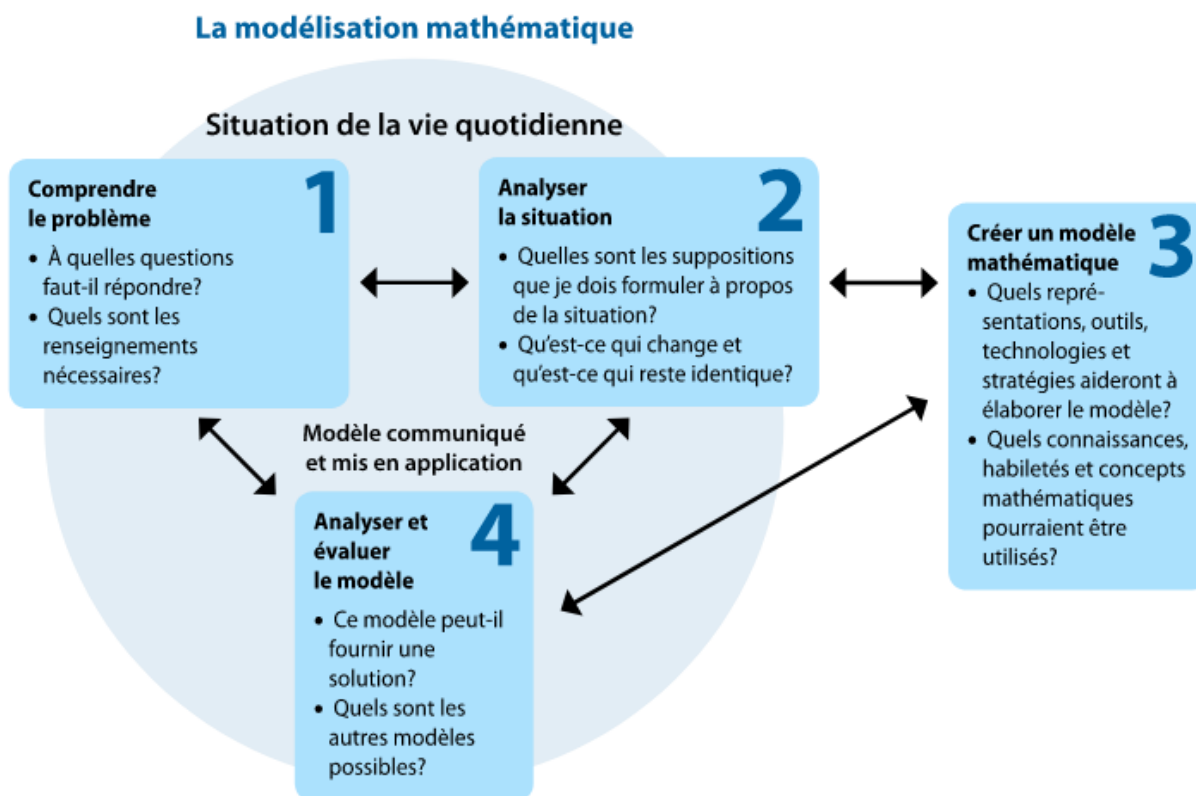


Figure 4. Le processus de modélisation mathématique (ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2020)⁴.

La numérotation des composants de la figure 4 suggère que l'activité de modélisation doit être organisée dans un ordre spécifique et qu'elle doit de préférence contenir tous les composants. Cependant, en remarquant les trois cycles dans la figure, les enseignants ont pu se rendre compte des similitudes et des différences avec certaines pédagogies déjà familières :

(a) *Cycle 1-2-3-4*: Un processus complet de modélisation amène les élèves d'une situation réelle (1, 2) à un modèle mathématique (3) et revient à la situation réelle (4). Le processus est cyclique et itératif.

(b) *Cycle 2-3-4*: Ce processus est une version simplifiée et s'apparente davantage à la résolution de problèmes traditionnelle. L'étudiant a apparemment la connaissance du contenu nécessaire pour

⁴ <https://www.dcp.edu.gov.on.ca/fr/curriculum/elementaire-mathematiques/contexte/domaines-d-etude-mathematiques#domaine-c-algebre>

accomplir la tâche. Cependant, si l'analyse (4) montre que les élèves doivent réévaluer la situation ou refaire le modèle, ils pourraient être renvoyés à (2) ou (3).

(c) *Cycle 1-2-4*: Ce processus est entièrement mené dans un environnement réel et peut être organisé dans des situations où les étudiants sont invités à choisir des modèles et à les évaluer (Martinovic et Milner-Bolotin, 2021). Par exemple, l'enseignant peut demander quel type de régression décrit le mieux les données.

Les flèches bidirectionnelles du schéma soulignent que malgré la numérotation, il est possible de sauter une étape ou de revenir à une précédente. Cela ouvre des possibilités pour les enseignants de concevoir des activités flexibles qui répondent à différents objectifs d'apprentissage. En même temps, le diagramme se concentre sur ce que les élèves doivent faire pendant l'activité de modélisation, mais il ignore complètement l'enseignant. Par conséquent, les enseignants peuvent ne pas le considérer comme pertinent ou l'interpréter de manière erronée (Barquero, Bosch et Romo, 2018 ; Frejd, 2012). Pour ces raisons, nous aborderons ensuite les différents rôles lors de la modélisation.

Rôles de l'enseignant et des élèves pendant la modélisation

La modélisation mathématique est un défi tant pour les étudiants que pour les enseignants (Xu *et al.*, 2022). Le principal problème découle de sa dépendance à l'égard de compétences qui divergent de celles qui appartiennent au programme traditionnel de mathématiques. Il n'est donc pas surprenant que, dans les salles de classe, on ait souvent enregistré des écarts évidents par rapport aux attentes du programme en lien avec le processus de modélisation. En plus des défis relatifs au temps nécessaire pour organiser un cycle complet de modélisation et l'évaluer, les enseignants se retrouvent confrontés à des défis mathématiques, pédagogiques et épistémologiques (Manouchehri, 2017). Sur la base des analyses de Manouchehri d'une séquence de développement professionnel de 25 heures avec des enseignants du secondaire aux États-Unis, les défis mathématiques comprenaient la difficulté d'identification des variables, le choix des informations à conserver, le fait de savoir quand approximer et utiliser des heuristiques, des formules et des algorithmes exacts. Les défis pédagogiques étaient en rapport avec la confusion des enseignants sur les résultats à court et à long terme et l'évaluation de la modélisation, en particulier du fait que la plupart des activités de modélisation étaient organisées en travail d'équipes. Enfin, les difficultés épistémologiques étaient liées à la subjectivité perçue de l'évaluation de ce qui est important et de ce qui ne l'est pas, au fait de juger si un modèle est adéquat ou s'il a besoin d'être affiné, si les connaissances de base sont adéquatement mises en œuvre, etc.

Lesh et Yoon (2007) soulignent comment « les cycles de modélisation que traversent ceux qui résolvent des problèmes impliquent généralement de repenser systématiquement la nature des données, des objectifs et les étapes de résolution pertinentes - ou des modèles et relations qui sont attribués aux données de surface. Par conséquent, les éléments les plus significatifs qui sont analysés et transformés (ou traités) sont les propres façons de penser des élèves sur les données et les objectifs - et les modèles et régularités qui sont attribués (plutôt que déduits) aux informations disponibles (p. 167).

Des idées similaires sont soulignées par Carrejo et Marshall (2007), qui avertissent que s'ils ne sont pas suffisamment préparés, de nombreux enseignants peuvent faire appel à des méthodes

d'enseignement direct qui ne facilitent pas la compréhension conceptuelle ou l'abstraction [, et même...] abandonner complètement une approche basée sur enquête. (p. 48). Pollak (2011) trouve également cela problématique quand les enseignants soient trop prescriptifs :

Le cœur de la modélisation mathématique, comme nous l'avons vu, est la recherche de problèmes avant la résolution de problèmes. Très souvent en mathématiques, on dit « prouver ce théorème » ou « résoudre ce problème ». Lorsque nous commençons à ce stade, nous négligeons le fait que trouver le théorème ou le bon problème était une grande partie de la bataille. En mettant l'accent sur l'aspect de la recherche de problèmes, la modélisation mathématique ramène à l'enseignement des mathématiques cet aspect de notre sujet et renforce considérablement la cohérence de l'expérience mathématique totale. [notre traduction] (p. 64)

Modélisation du mouvement (cinématique)

Pourquoi s'intéresser à la physique? au mouvement? Quel est le lien entre la cinématique et les mathématiques? Pour répondre à ces questions, nous nous tournons vers l'histoire des sciences. Brousseau (1997) écrit : « Les obstacles d'origine réellement épistémologique sont ceux auxquels on ne peut ni ne doit échapper, en raison de leur rôle formateur dans la connaissance recherchée. On les retrouve dans l'histoire des concepts eux-mêmes » (p. 87). L'idée est de s'appuyer sur des « arguments historiques pour choisir une genèse d'un concept utilisable à l'école et construire ou "inventer" des situations pédagogiques qui permettront cette genèse » (p. 96). Ou, comme le conseille Jankvist (2009), « Pour vraiment apprendre et maîtriser les mathématiques, l'esprit doit passer par les mêmes étapes que les mathématiques ont traversées au cours de leur évolution » [notre traduction] (p. 239). Bien sûr, ce n'est pas toujours possible, mais chaque fois que nous sommes confrontés à un concept particulièrement difficile, examiner son évolution historique peut être une approche utile.

Koetsier (2012) écrit que « le mouvement a toujours joué un rôle en géométrie » (p. 497). Il décrit comment Euclide a défini des figures tridimensionnelles comme les résultats de la rotation de figures bidimensionnelles (c'est-à-dire une sphère - révolution d'un demi-cercle autour de son diamètre ; un cône - révolution d'un triangle rectangle autour de l'une de ses cathètes; un cylindre - révolution d'un rectangle autour d'un de ses côtés). De façon similaire, Newton a conceptualisé les quantités mathématiques comme le résultat du mouvement (c'est-à-dire les lignes créées par un point en mouvement, les plans par les lignes en mouvement, les solides comme des figures planes en mouvement, les angles comme des côtés en rotation). De cette façon, historiquement, les objets mathématiques continus étaient les résultats de mouvements continus incarnés (Radford, 2009). S'inspirant probablement de ces références historiques, Hestenes (2010) voit la principale lacune des programmes de mathématique en ce qu'il manque de connexion à l'intuition physique, qui fournirait « les liens structurels avec l'expérience corporelle dont toute signification découle en fin de compte ». Il suggère d'organiser le programme de mathématiques « autour de modèles, pas de sujets! » et exhorte les étudiants à

se familiariser avec *un petit ensemble de modèles de base comme noyau de contenu* pour chaque branche de la science, ainsi que des extensions choisies vers des *modèles plus complexes...* Comprendre la structure commence par identifier les éléments d'un système et leurs relations, et les représenter visuellement. [notre traduction] (p. 33).

Ensuite, l'analyse commence; le modèle est-il linéaire ou non? La validation pourrait se faire par le biais d'une expérience et d'une collecte de données. À la fin de cette phase, les élèves doivent

avoir « des réponses claires à deux questions : quel est leur modèle et à quel point est-il fiable? » (p. 35).

Question: Quels sont les modèles de base que vous connaissez et qui sont au cœur du contenu d'une branche de la science?

Pour les éducateurs, cela est parfaitement logique - nous savons que les élèves apprennent mieux lorsqu'ils expérimentent ou incarnent des concepts enseignés. Lors de la modélisation de phénomènes cinématiques, les élèves pourraient faire rouler une balle sur une surface plane et consigner leurs observations, la faire rouler vers le bas et vers le haut d'une rampe; suivre le mouvement d'une balle lancée directement en l'air ou lâchée depuis une fenêtre, ou suivre la trajectoire d'une balle lancée sous un angle. Des activités similaires font partie du jeu quel que soit l'âge, mais cette fois, les élèves sont invités à aborder le « jeu » méthodiquement.

Une philosophe française, Nicole Oresme (1323-1382), a représenté les variations de vitesse et de temps au moyen de figures géométriques, dans lesquelles la ligne AB représente le temps et les droites perpendiculaires des valeurs de vitesse constantes (Fig. 5(a)) ou uniformément croissantes (figure 5(b)). Un mouvement à vitesse constante est représenté par un rectangle – car on a des bases horizontales parallèles et des perpendiculaires à ces bases qui sont de même mesure ($m\overline{AC} = m\overline{EF} = m\overline{BD}$), tandis qu'une accélération uniforme est représentée par un triangle rectangle, et des triangles qui lui sont semblables, ayant des côtés proportionnels.

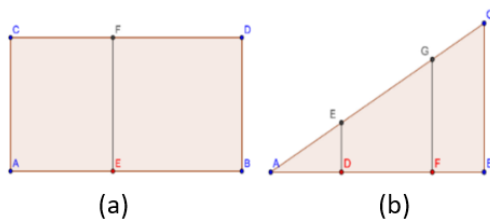


Figure 5. Représentation selon Oresme d'une vitesse uniforme ($a = 0$) à gauche et d'une accélération uniforme à droite ($a = \text{const.}, a \neq 0$) (Martínez et al., 2017, p. 1750).

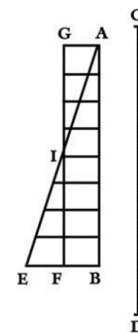


Figure 6. Mouvement uniformément accéléré – chute libre (Galilei, 1954, Fig. 47.)

La représentation de Galileo Galilei (1564-1642) d'un mouvement uniforme pendant la chute libre (Fig. 6) combine un rectangle avec un triangle rectangle. Un corps part du repos en C et accélère uniformément en raison de la gravité. La ligne du temps entre deux points arbitraires A et B est divisée en intervalles égaux de temps pendant lesquels la vitesse augmente uniformément de 0 à la longueur de EB. Étant donné que F est le milieu de EB, le rectangle AGFB a une aire égale à l'aire du triangle AEB, d'où Galilée⁵ a conclu que « le temps pendant lequel un espace quelconque est parcouru par un corps partant du repos et uniformément accéléré est égal au temps où ce même espace serait parcouru par le même corps se déplaçant à une vitesse uniforme dont la valeur est la moyenne de la vitesse la plus élevée et de la vitesse juste avant le début de l'accélération » (p. 172).

⁵ Vous pouvez trouver d'autres idées pour représenter géométriquement différentes idées de la cinématique dans Galileo Galilei, [Dialogues Concerning Two New Sciences](#), traduit en anglais par Henry Crew et Alfonso de Salvio, avec une introduction de Antonio Favaro, Dover Publications, Inc., New York, 1954: 153–243. Publié initialement par MacMillan en 1904.

Les formules de mouvement suivantes font partie d'un programme général de physique. Dans celles-ci, r représente la position de l'objet, v et \bar{v} représentent respectivement sa vitesse instantanée et sa vitesse moyenne, t représente le temps, et r_0 et v_0 sont respectivement les valeurs initiales de la position et de la vitesse.

1. Mouvement uniforme ($v = \text{const}$; $a = 0$):

$$\text{a) } r(t) = r_0 + v_0 t \quad \text{et} \quad \text{(b) } r(t) = r_0 + \bar{v} t,$$

2. Mouvement uniformément accéléré v varie uniformément ($a = \text{const}$):

$$\text{c) } r(t) = r_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad \text{et} \quad \text{(d) } r(t) = r_0 + \bar{v} t$$

Questions possibles:

- 1. Qu'est-ce qui change dans ces formules et qu'est-ce qui est fixe? Qu'est-ce que ça veut dire?*
- 2. Que signifie le mot « uniforme » pour chacun de ces cas?*
- 3. En quoi les formules (a) et (b) sont-elles différentes? Quand utiliseriez-vous chacune de ces formules ?*
- 4. Pourquoi les formules (a) et (b) utilisent-elles respectivement la vitesse initiale et la vitesse moyenne?*
- 5. Quand la vitesse moyenne est-elle identique à la vitesse initiale? Quand sont-elles différentes?*
- 6. Comment toutes ces formules pourraient-elles être représentées graphiquement?*
- 7. D'où vient le $\frac{1}{2}$ dans la troisième formule? Quelle est sa signification?*
- 8. Pouvez-vous utiliser les formules (c) et (d) pour décrire un mouvement à vitesse constante? Justifiez votre réponse.*
- 9. Comment pouvez-vous représenter ces formules à l'aide d'un logiciel graphique (par exemple, la calculatrice graphique Desmos)? Qu'est-ce que cela vous apprend sur ces relations?*

Exemple de modélisation :

Décrire le mouvement signifie connaître la position de l'objet à tout moment. Pour ce faire, nous devons tenir compte de la vitesse, de la direction du mouvement et de son point de départ. Par exemple, une voiture peut se déplacer à la vitesse de 10 m/s vers le nord ou vers le sud. Alors que la vitesse de la voiture est la même dans les deux cas, le sens du mouvement ne l'est pas. Pour décrire ce mouvement, nous devons tenir compte de l'orientation, ainsi que de la vitesse. Pourquoi est-ce ainsi? Si vous conduisez pendant 10 minutes vers le nord, puis pendant 10 minutes vers le sud (à la même vitesse), vous vous retrouverez au même endroit que vous avez commencé; à ce moment-là, le *déplacement* (changement de position) de votre voiture sera de 0, bien que vous ayez passé 20 minutes à conduire et *parcouru une distance* de 12 km. Voici un exemple élaboré d'une activité de modélisation adaptée aux élèves à partir du premier cycle du secondaire. À la fin de cette leçon, les élèves seront en mesure de faire la distinction entre la vitesse moyenne et la vitesse instantanée, la lecture d'une carte et la lecture d'un graphique, et la comparaison des rapports.

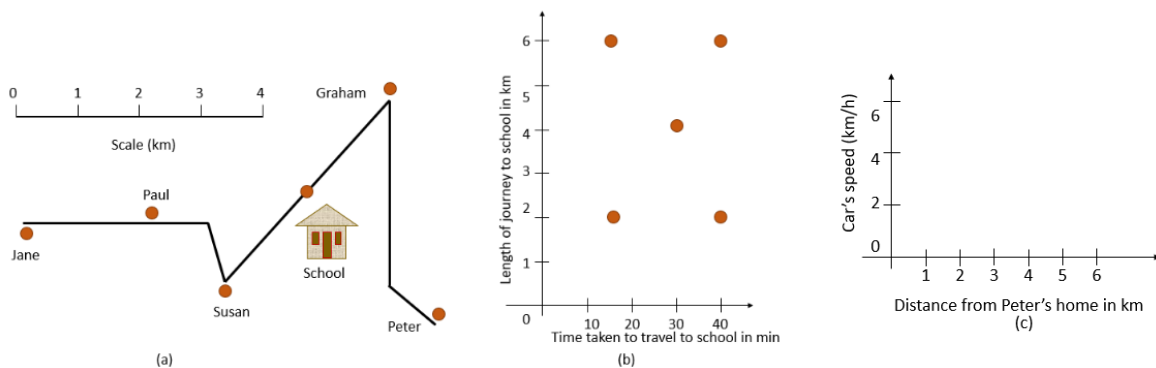
Des situations simplifiées peuvent être partagées avec des élèves plus jeunes, par exemple, une question de classement similaire a été posée aux élèves de 3^e année dans l'étude de Carmona et Greenstein (2010). Dans le problème de classement d'équipe, les élèves ont comparé les performances de 12 équipes dont les victoires et les défaites dans les jeux étaient présentées dans un système de coordonnées cartésien sans unité. En d'autres termes, on a présenté aux élèves un système de coordonnées sur lequel 12 points ont été positionnés. Bien que le système de

coordonnées cartésien ne soit pas encore au programme, les étudiants ont développé un système de classement sophistiqué entre les équipes, qui comprenait une sorte de compréhension primitive du concept de pente avec un rapport entre les gains et les pertes, et en cas d'égalité, en utilisant le nombre total de parties jouées comme facteur décisif.

La question 6 plus bas offre des possibilités intéressantes pour prolonger cette activité de modélisation en 9^e année, où nous suggérons également d'ajouter les graphiques vitesse/temps plus conventionnels, et où les élèves peuvent se rendre compte comment la même situation pourrait être présentée différemment en fonction des étiquettes sur les axes. Pour les classes des élèves plus âgés, cette activité sur le mouvement pourrait être étendue avec des idées sur les vecteurs, le déplacement et la vitesse signée. De plus, la technologie (par exemple, les détecteurs de mouvement, la calculatrice graphique Desmos et les caméras vidéos,...) pourrait être utilisée tout au long de l'activité.

Exemple 1: Modélisation du mouvement des élèves (adapté du Shell Center for Mathematical Education, 1985, p. 28-36)

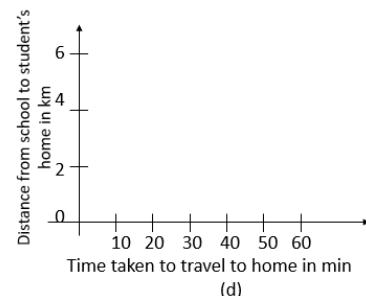
Jane, Graham, Susan, Paul et Peter se rendent tous à l'école par la même route de campagne tous les matins. Peter monte dans la voiture de son père, Jane fait du vélo et Susan marche. Les deux autres élèves changent de moyen de transport quotidiennement.



Exemple 1: (a) La carte de la route de campagne. (b) Les points représentent les déplacements des étudiants **lundi** dernier. (c) Système de coordonnées pour décrire le mouvement de la voiture du père de Peter **lundi** dernier.

Justifiez vos réponses et indiquez clairement vos hypothèses pour les questions ci-dessous.

1. Étiquetez chaque point du graphique (b) avec le nom de la personne qu'il peut représenter.
2. Comment Paul et Graham ont-ils pu se rendre à l'école **lundi** ?
3. Le père de Peter peut rouler à 30 km/h sur les sections droites de la route, mais il doit ralentir dans les virages. Dessinez un graphique dans le système de coordonnées (c) pour montrer comment la vitesse de la voiture a pu varier le long du trajet vers l'école.
4. D'après votre modèle, quelle était la vitesse **instantanée** de la voiture à 3,5 km du domicile de Pierre ?
5. Tracez un graphique de la vitesse **moyenne** de la voiture sur la route dans le même système de coordonnées (c).
6. La vitesse moyenne est calculée comme le rapport de la distance parcourue sur le temps écoulé. Sur la base des données fournies en (b), ordonnez les vitesses moyennes des élèves. Énoncez clairement vos hypothèses.
7. Tous les élèves ont quitté l'école à 15 heures le lundi. Utilisez le système de coordonnées (d) pour représenter la variation de la distance des élèves de l'école par rapport au temps, à condition qu'ils aient utilisé le même mode de transport pour se rendre à la maison qu'à l'école.

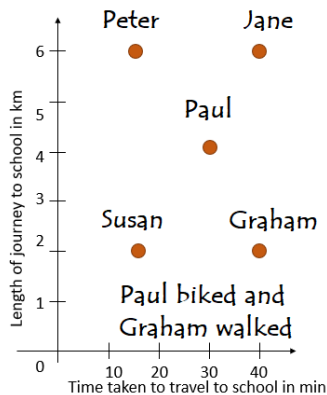


Étapes de l'activité (en utilisant le cadre pédagogique pour la modélisation en STEM de l'annexe A)

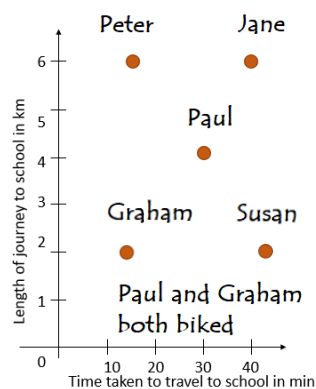
Étape I : L'enseignant a préparé l'activité. Il s'agit d'un exemple de mouvement qui utilise de nouveaux termes (par exemple, vitesse instantanée et vitesse moyenne). Après avoir anticipé les difficultés et identifié les objectifs d'apprentissage, l'enseignant discute avec les élèves de la recherche de l'évidence observable en sciences par opposition au besoin de fournir une preuve en mathématique. Par exemple, on demandera aux étudiants de justifier leurs résultats plutôt que de les prouver.

Étape II : L'enseignant fournit une carte géographique des alentours de l'école et des documents, encourage les enfants et consigne la discussion au tableau. Il organise les élèves en équipes, selon le scénario qu'ils ont choisi. Les élèves discutent de la manière dont ils se rendent à l'école; sur la carte, ils tracent leurs trajets habituels et utilisent l'échelle pour calculer la distance qu'ils parcourent quotidiennement. En fonction de cela et du temps qu'il leur faut chacun pour se rendre à l'école, ils calculent leurs vitesses moyennes. Ensuite, ils essaient de comprendre les modes de voyageant des 5 élèves de l'exercice (voir l'exemple 1(a)) et notent leurs hypothèses (par exemple, la zone de l'école est plate ou vallonnée; la route est en asphalte ou en macadam) et les conséquences sur la tâche.

Étape III : Cette étape se concentre sur les contributions des élèves. L'enseignant surveille la discussion des élèves et évalue s'ils sont prêts à passer à la création de leurs modèles (s'ils savent lire une carte, ce qui est important pour comprendre la figure (a)). Par exemple, ils pourraient répondre aux questions 1 et 2 plus haut de la manière suivante:

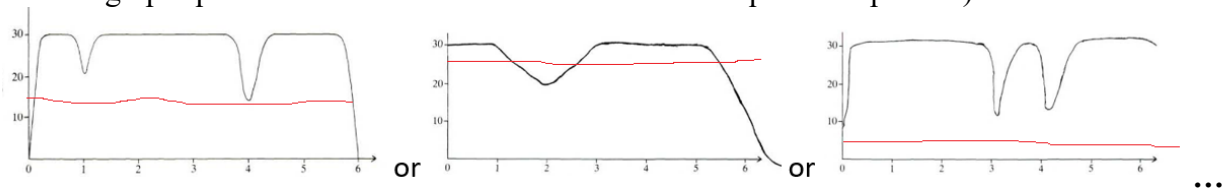


ou

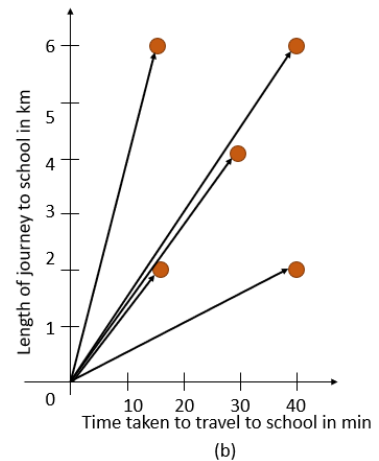


ou autre!

Étape IV: Les élèves travaillent sur les premières étapes de modélisation, l'enseignant les aide. Les élèves peuvent proposer les modèles suivants pour la *question 3*, qui détermineront leur réponse à la *question 4* (la ligne rouge représente la vitesse moyenne anticipée par les élèves à partir du graphique de la vitesse en fonction de la distance qu'ils ont produit):



Étape V: Les élèves testent leurs modèles; l'enseignant les aide. Les élèves comparent leurs modèles; ils trouvent des similitudes et des différences et les relient à des hypothèses ou les révisent si des malentendus sont constatés. L'enseignant présente la définition de la vitesse moyenne et surveille les approches des élèves pour répondre à la *question 6*. Les élèves peuvent proposer différents critères de classement dont celui-ci qui peut émerger: sur la base des valeurs des ratios, les vitesses moyennes obtenues par les élèves sont classées en fonction des taux de variation des droites (c'est-à-dire la longueur du trajet/la durée de ce trajet).



Étape VI: Consolidation des connaissances facilitée par l'enseignant. Pour consolider les connaissances, l'enseignant demande aux élèves de répondre à la *question 6*. La différence entre l'idée de vitesse instantanée et celle de vitesse moyenne est renforcée. Différents modèles des élèves peuvent être revus en détail avec l'aide des équipes d'élèves qui les ont développés.

Tout au long de l'activité, l'enseignant est attentif aux sources de difficultés des élèves que les recherches permettent d'anticiper (Doorman, 2005), dont -la différence de la façon dont le terme « moyenne » est utilisé en physique et en mathématique et -que pour les courbes et les droites (de graphiques distance / temps), le taux moyen de variation est calculé de façon semblable alors que le taux de variation instantané ne l'est pas (c'est-à-dire que pour les droites dans un graphique distance / temps, la vitesse instantanée est égale à l'ordonnée d'un point du graphique vitesse / temps qui lui est associé alors que pour les courbes, c'est la pente d'une tangente à la courbe du graphique distance / temps en ce point qui donne la valeur recherchée).

La visualisation d'Oresme (Figure 5 a) et b)) de la relation entre la vitesse constante et le temps indique que la distance est numériquement égale à l'aire d'un rectangle ou d'un triangle dans le cas d'un mouvement uniformément accéléré, un concept difficile à comprendre car il assimile la mesure linéaire à l'aire. Le fait que l'immobilité ne soit pas représentée par un point mais plutôt par une ligne horizontale sur un graphique vitesse/temps est également source de confusion. Les détecteurs de mouvement pourraient aider les élèves à incarner des graphiques comme représentations de leurs mouvements. L'enregistrement vidéo du mouvement et son analyse collective aideraient à clarifier ou à atténuer les éventuels malentendus chez les élèves.

Ressources additionnelles (1-6, de Manouchehri, 2017):

1. Rainfall problem (Bocci, F. (2012). *European Journal of Physics*, 33, 1321).
2. Basketball problem (Barrett, G., Markovich, K., & Compton, H. (1999). *Contemporary pre-calculus through applications (2nd ed., p. 275)*. Glencoe/McGraw-Hill).
3. Spaghetti problem (D’Andrea, C., & Gomez, E. (2006). The broken spaghetti noodle. *The American Mathematical Monthly*, 113(6), 555–557.
4. Financing college education (Dossey et al., (2003). *Mathematics methods and modelling for today’s mathematics classroom (p. 97)*. Pacific Grove, Thomson Learning).
5. Ping-pong ball problem (Starfield, A.M., Smith, K.A., & Bleloch, A.L. (1990). *How to model it: Problem solving for the computer age*. McGraw-Hill).
6. [Establishing a new international airline hub.](#)
7. [Mathematics Assessment Project materials.](#)
8. [Arithmetic and Algebra to Solve Fairness Problems.](#)
9. [Modelling Instruction Program at the Arizona State University.](#)

Appendice A: Cadre pédagogique pour la modélisation en STEM (Martinovic et Milner-Bolotin, 2021).

Étape	Les rôles de l’enseignant et de l’élève en situation de modélisation	Dévolution
I	L’enseignant prépare les élèves: il discute de la façon dont l’épistémologie est reflétée dans la modélisation. L’enseignant prépare une leçon: il sélectionne un phénomène, développe des activités, anticipe des difficultés, des questions, des défis, etc.	L’enseignant relâche le contrôle de l’apprentissage des élèves à mesure que les élèves passent du stade I au stade VI.
II	Les étudiants sont immergés dans des expériences concrètes riches en contexte; discutent de la façon dont chaque membre de l’équipe peut contribuer. L’enseignant fournit des ressources, note les questions initiales, organise ce que les élèves savent et ce qu’ils veulent savoir. Il organise des groupes, discute de ce que les membres de sa discipline apprennent à connaître et de quelle façon, il guide / étaye les activités de modélisation.	
III	Les élèves apportent ce qu’ils savent et quelles connaissances la situation exige, évaluent comment la situation actuelle remet en question et élargit ce qu’ils savent. L’enseignant facilite, fournit des ressources, organise les questions initiales des élèves, discute des limites, surveille leur travail.	↓
IV	Les élèves proposent des hypothèses de travail, proposent des patterns, des modèles, des théories, etc. qui pourraient expliquer les relations entre les phénomènes observés. Ils discutent et utilisent différentes perspectives des membres du groupe pour interpréter et comprendre le phénomène. L’enseignant surveille le travail des élèves.	Les élèves prennent le contrôle de leur apprentissage au fur et à mesure qu’ils passent du stade I au stade VI
V	Les élèves vérifient si les résultats de l’étape IV concordent avec de nouvelles expériences concrètes et de quelle façon, collectent de nouvelles évidences, utilisent les modèles proposés pour générer de nouvelles données, expliquent le phénomène, permettent des explications alternatives, testent les modèles, décident si le travail est fait et pourrait être remis ou si on commence un nouveau cycle d’enquête. L’enseignant surveille le travail des élèves, pose des questions et regroupe les élèves au besoin.	
VI	Les élèves reviennent à l’étape II avec une meilleure compréhension du phénomène, avec un ensemble de nouvelles questions comme motivation pour un nouveau cycle. L’enseignant consolide ou revisite l’activité de modélisation, propose des modifications pour la suite.	

Références:

- Barquero, B., Bosch, M. et Romo, A. (2018). *Mathematical modelling in teacher education: Dealing with institutional constraints*. *ZDM*, 50(1), 31-43.
- Carmona, G. et Greenstein, S. (2010). Investigating the Relationship Between the Problem and the Solver: Who Decides What Math Gets Used? Dans R. Lesh, P. L. Galbraith, C. R. Haines et A. Hurford (dir.), *Modeling students’ mathematical modeling competencies: ICTMA 13* (p. 245-254). Springer.
- Carrejo, D.J. et Marshall, J. (2007). What is mathematical modelling? Exploring prospective teachers’ use of experiments to connect mathematics to the study of motion. *Mathematics Education Research Journal*, 19, 45–76.

- Doorman, L. M. (2005). *Modelling motion: From trace graphs to instantaneous change*. Dissertation Utrecht University. <https://dspace.library.uu.nl/bitstream/handle/1874/1727/full.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Frejd, P. (2012). Teachers' conceptions of mathematical modelling at Swedish Upper Secondary school. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(5), 17-40.
- Hestenes, D., (2010). Modeling Theory for Math and Science Education. Dans R. Lesh, P.L. Galbraith, C. R. Haines et A. Hurford (dir.), *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies: ICTMA 13* (p. 13-41). Springer.
- Jankvist, U.T. (2009). A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 71, 235–261.
- Koetsier, T. (2012). The Case of Kinematics, the Genesis of a Discipline. Dans T. Koetsier et M. Ceccarelli (dir.), *Explorations in the History of Machines and Mechanisms. History of Mechanism and Machine Science*, vol 15. Springer.
- Lesh, R., Young, R. et Fennewald, T. (2010). Modeling in K-16 Mathematics Classrooms – and Beyond. Dans R. Lesh, P. L. Galbraith, C. R. Haines, et A. Hurford (dir.), *Modeling students' mathematical modeling competencies: ICTMA 13* (p. 275-283). Springer.
- Lesh, R. et Yoon, C. (2007). What is Distinctive in (Our Views about) Models & Modelling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching? Dans Blum, W., Galbraith, P.L., Henn, HW. et Niss, M. (dir.), *Modelling and Applications in Mathematics Education. ICMI Study Series*, vol 10. Springer.
- Manouchehri, A. (2017). Implementing Mathematical Modelling: The Challenge of Teacher Educating. Dans Stillman, G., Blum et W., Kaiser, G. (dir.), *Mathematical Modelling and Applications. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling*. Springer.
- Martínez, A., Figueras, O. et Pluvinage, F. (2017). *Teaching kinematics using mathematics history*. CERME 10, Feb 2017, Dublin, Ireland.
- Martinovic, D. et Milner-Bolotin, M. (2021). Examination of modelling in K-12 STEM teacher education: Connecting theory with practice. *STEM Education*, 1(4), 279-298.
- Milner-Bolotin, M. et Zazkis, R. (2021). A study of future physics teachers' knowledge for teaching: A case of a decibel sound level scale. *LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education*, 9(1), 336-365.
- Niss, M., Blum, W. et Galbraith, P. (2007). Introduction. In W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn et M. Niss (dir.), *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI Study* (p. 3–32). Springer.
- Ortiz-Revilla, J., Adúriz-Bravo, A. et Greca, I.M. (2020). A framework for epistemological discussion on integrated STEM education. *Science & Education*, 29, 857-880.
- Pollak, H. O. (2011). What is mathematical modeling? *Journal of Mathematics Education at Teachers College*, 2(1), 64.
- Radford, L. (2009). Why do gestures matter? Sensuous cognition and the palpability of mathematical meanings. *Educational Studies in Mathematics*, 70(2), 111–126.
- Shell Centre for Mathematical Education. (1985). The Language of Functions and Graphs. https://www.mathshell.com/publications/tss/lfg/lfg_teacher.pdf
- Xu, B., Lu, X., Yang, X (2022). Mathematicians', mathematics educators', and mathematics teachers' professional conceptions of the school learning of mathematical modelling in China. *ZDM Mathematics Education*, 54, 679–691.

Le MKN (Mathematics Knowledge Network) est financé par le ministère de l'Éducation de l'Ontario. Le MKN est un projet KNAER (The Knowledge Network of Applied Education Research) , hébergé par le Fields Institute for Research in Mathematical Sciences. Les opinions exprimées dans ce document appartiennent à Marina Milner-Bolotin et Dragana Martinovic et ne reflètent pas nécessairement les opinions du ministère de l'Éducation ni du gouvernement de l'Ontario.

